Operatory w przestrzeniach L_p
Lista 2

Zad 1. Przypomnijmy, że funkcja zespolona $f : \Omega \to \mathbb{C}$ jest całkowalna względem miary μ na Ω wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje rzeczywiste $\operatorname{Re} f : \Omega \to \mathbb{R}$ oraz $\operatorname{Im} f : \Omega \to \mathbb{R}$ są całkowalne, i wtedy kładziemy

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega \operatorname{Re} f\, d\mu + i \int_\Omega \operatorname{Im} f\, d\mu.$$

Pokazać, że całka zespolona jest $\mathbb{C}$-liniowa oraz że $|\int_\Omega f\, d\mu| \leq \int_\Omega |f|\, d\mu$.

Zad 2. Przypomnijmy, że miarą zespoloną na przestrzeni mierzalnej (Ω, Σ) nazywamy σ-addytywną funkcję zbioru $\nu : \Sigma \to \mathbb{C}$. Pokazać, że dla każdej takiej miary $\nu(\emptyset) = 0$, oraz $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, gdzie $\nu_1, \nu_2 : \Sigma \to \mathbb{R}$, to miary znakowe (ładunki).

Zad 3 (Tw. Radona-Nikodyma dla miar zespolonych)**.** Korzystając z klasycznego twierdzenia Radona-Nikodyma (dla miar dodatnich) oraz rozkładu Hahna-Jordana pokazać, że miara zespolona $\nu : \Sigma \to \mathbb{C}$ jest *absolutnie ciągła* względem miary $\mu : \Sigma \to [0, +\infty)$, tzn. $\nu(A)$ dla każdego $A \in \Sigma$ takiego, że $\mu(A) = 0$ $\iff$ istnieje funkcja $f \in L_1(\mu)$ taka, że $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ dla każdego $A \in \Sigma$. Ponadto

- $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ jest ładunkiem wtedy i tylko wtedy f funkcja rzeczywista (μ-p.w.)
- $\nu : \Sigma \to [0, \infty)$ jest miarą wtedy i tylko wtedy f funkcja nieujemna (μ-p.w.)

Zad 4. Wyznacz normę operatora $A : \ell_p \to \ell_p$, $p \in [1, \infty)$, oraz operator sprzężony $A^* : \ell_q \to \ell_q$, gdzie

a) $Ax = (x(1), x(2), ..., x(n), 0, 0, ...)$

b) $Ax = (x(1), x(3), x(5), x(7), ...)$

c) $Ax = (x(2), x(3), x(4), ...)$

d) $Ax = (\frac{1}{3}x(1), \frac{1}{3^2}x(2), ..., \frac{1}{3^n}x(n), ...)$

e) $Ax = (2x(1), \frac{9}{4}x(2), ..., (\frac{n+1}{n})^n x(n), ...)$

Zad 5. Niech $\varphi : \Omega \to \Omega$ *automorfizm przestrzeni* z miarą (Ω, Σ, μ), tzn. φ jest odwracalnym odwzorowaniem mierzalnym zachowującym miarę. Pokazać, że operatora kompozycji $A : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$, $Ax = x \circ \varphi$, jest odwracalną izometrią. Wyznaczyć operator sprzężony do A.

Zad 6. Niech $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ będzie odwzorowaniem "trójkącik", tzn. $\varphi(t) = 1 - |2t - 1|$. Pokazać, że operator kompozycji $A : L_p[0, 1] \to L_p[0, 1]$, $p \in [1, \infty)$, $Ax = x \circ \varphi$, jest nieodwracalną izometrią. Wyznaczyć operator sprzężony do A.

Zad 7. Niech $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ będzie funkcją kawałkami monotoniczną i różniczkowalną w sposób ciągły, tzn. istnieje podział $a = t_0 < t_1 < ... < t_{n+1} = b$ odcinka $[a, b]$ taki, że $\varphi_i := \varphi|_{(t_i, t_{i+1})}$ jest ściśle montoniczna i klasy $C^{(1)}$. Sprawdzić, czy operator sprzężony do operatora kompozycji $A : L_p[a, b] \to L_p[a, b]$, $p \in [1, \infty)$, $Ax = x \circ \varphi$, jest dany wzorem

$$(A^* y)(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y(\varphi_i^{-1}(t))}{|\varphi'(\varphi|_i^{-1}(t))|} \mathbb{1}_{\varphi(t_i, t_{i+1})}(t)$$

Zad 8. Pokazać, że każda rzeczywista przestrzeń $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, jest abstrakcyjną przestrzenią L_p (a w szczególności kratą Banacha).

Zad 9. Pokazać, że każdej kracie Banacha mamy $x \wedge y = -((-x) \vee (-y)) = x + y - x \vee y$.

Zad 10. Zbadać, zbieżność ciągu operatorów $A_n : X \to Y$, gdy

	X	Y	A
a)	ℓ_1	ℓ_1	$A_n x = (x(1), x(2), ..., x(n), 0, 0, ...)$
b)	ℓ_2	ℓ_2	$A_n x = \left(\frac{n+1}{n}x(1), \frac{n+1}{n}x(2)..., \frac{n+1}{n}x(n), x(n+1), x(n+2), ...\right)$
c)	ℓ_1	$L_p[0, 1]$, $p \geq 1$,	$(A_n x)(t) = x(n)$
d)	$L_2[0, 1]$	$L_1[0, 1]$	$(Ax)(t) = (1 - t^n)x(t)$